УДК 517.946

И. И. Скрыпник

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Изучаются локальные граничные свойства решений полигармонического уравнения Устанавливаются условия существования почти всюду некасательных и L_2-пределов. Развивается метод, примененный в работах [1, 3], в которых изучается поведение решений уравнения Лапласа и общего линейного эллиптического уравнения вблизи границы. Близкими вопросами занимались В. П. Михайлов, А. К. Гущин, И. М. Петрушко, М. Л. Горбачук, Я. А. Ройтберг (ссылки на работы перечисленных авторов имеются в [3]).

Точки пространства R^{n+1} будем обозначать через $z=(x, y)$, где $x\in\in R^n$. Рассмотрим также полупространство

$$R_+^{n+1}=\{z=(x, y)\in R^{n+1}: y>0\}.$$

Для произвольного $a>0$ обозначим

$$\Gamma_a(x)=\{(s, y)\in R_+^{n+1}: |s-x|<ay\}. \tag{1}$$

Пусть W — произвольное множество из R_+^{n+1}, $u(z)$ — произвольная непрерывная функция, определенная на W. Определим в R^n функцию

$$N_{W,a}(x)=\sup\{|u(s, y)|, (s, y)\in\Gamma_a(x)\cap W\} \tag{2}$$

($N_{W,a}(x)=0$ при $\Gamma_a(x)\cap W=\varnothing$). Она измерима, так как каждая точка $(s, y)\in\Gamma_a(x_0)$ принадлежит $\Gamma_a(x)$ при всех x, достаточно близких к x_0, и значит, все множества $\{N_{W,a}>\lambda\}$ открыты.

Если W — ограничено, $y_s=\sup\{y, (s, y)\in W\}$, то также измерима и функция

$$N^0_{W,a}(x)=\sup\{|u(s, y)-u(s, y_s)|, (s, y)\in\Gamma_a(x)\cap W\} \tag{3}$$

(при $\Gamma_a(x)\cap W=\varnothing$ полагаем ее равной нулю).

Будем использовать следующие обычные обозначения:

$$D^\mu=\frac{\partial^{\mu_1}}{\partial x_1^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial^{\mu_n}}{\partial x_n^{\mu_n}}\frac{\partial^{\mu_{n+1}}}{\partial y^{\mu_{n+1}}},\quad |\mu|=\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i.$$

Определим следующие функции:

$$A^{(i)}_{W,a}(x)=\left\{\sum_{|\mu|=i}\int_{W\cap\Gamma_a(x)} y^{2i-1-n}|D^\mu u(s, y)|^2\,dsdy\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

$$D_{W,a}(x)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{2m-1}\sum_{|\mu|=i} y^i|D^\mu u(s, y)|, (s, y)\in\Gamma_a(x)\cap W\right\} \tag{5}$$

(если $\Gamma_a(x)\cap W=\varnothing$, то $D_{W,a}(x)=0$), где m — произвольное натуральное число.

Рассмотрим в R_+^{n+1} уравнение

$$\Delta^m u=0, \tag{6}$$

m — натуральное, $m\geqslant 1$. Под решением уравнения (6) будем понимать классическое решение из C^{2m}.

Лемма 1. Пусть $u(z)$ — решение уравнения (6) в R_+^{n+1}, $h\in(0, H]$, $a_1>a>0$, $l\in(0, 1)$. Если области $W\subset W_1\subset\{(s, y)\in R_+^{n+1}, y<h\}$ таковы, что для любой точки $z_0=(x_0, y_0)\in\Gamma_a(x)\cap W$, замкнутый шар $\overline{B(z_0, ly_0)}\subset\Gamma_{a_1}(x)\cap W_1$, тогда найдется такое число $c_0=c_0(n, l, m, H)$, что выполнено неравенство

$$D_{W,a}(x)\leqslant C_0\sum_{i=1}^m A^{(i)}_{W_1,a_1}(x). \tag{7}$$

Доказательство. Используя представление для любого решения $u(z)$ полигармонического уравнения порядка $2m$, имеем

$$u(z_0)=\sum_{i=0}^{m-1} a_i\rho^i\int_S\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^i u(z_0+\rho\omega)\,ds(\omega), \tag{8}$$

где a_i зависят лишь от n, m; $S=\partial B(0,1)$, $\omega\in S$.

Пусть φ — фиксированная функция класса C^∞ на R^{n+1}, которая зависит только от радиуса, сосредоточена в единичном шаре и нормирована так, чтобы $\int\limits_{R^{n+1}}\varphi(z)\,dz=1$.

Интегрируя, из (8) получаем

$$u(z_0)=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{|\mu|=i} a_i' r^{-n-1}\int_{R^{n+1}}\tau^\mu\varphi\left(\frac{\tau}{r}\right)D^\mu u(z_0-\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^\alpha u(z_0)=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{|\mu|=i} a_i' r^{-n-1}\int_{R^{n+1}}D^\mu u(\tau)\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^\alpha\left[(z_0-\tau)^\mu\varphi\left(\frac{z_0-\tau}{r}\right)\right]d\tau. \tag{10}$$

Применяя неравенство Шварца, получаем

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^\alpha u(z_0)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{m}a_{i,\alpha}r^{i-\frac{n+1}{2}-|\alpha|}\left(\sum_{|\mu|=i}\int_{B(z_0,r)}|D^\mu u(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Возьмем теперь $r=ly_0$. Если $(s,y)\in B(z_0,ly_0)$, то $|s-x_0|^2+(y-y_0)^2<(ly_0)^2$. Отсюда

$$y=y-y_0+y_0<(1+l)\,y_0=\frac{1+l}{l}r,$$

$$y\geqslant y_0-|y-y_0|>(1-l)\,y_0=\frac{1-l}{l}r.$$

Неравенство (7) сразу же следует из (11).

Введем в рассмотрение конусы

$$\Gamma_{a,h}(x)=\{(s,y)\in R_+^{n+1}:|s-x|<ay,\ |s-x|^2+y^2<h^2\}.$$

Лемма 2. Пусть x_0 — произвольная точка из R^n и пусть выполнено неравенство

$$\sum_{|\mu|=m}\int_{\Gamma_{a,h}(x_0)}y^{2m-1-n}|D^\mu u(x,y)|^2\,dxdy<\infty,$$

тогда

$$\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{|\mu|=i}\int_{\Gamma_{a,h}(x_0)}y^{2i-1-n}|D^\mu u(x,y)|^2\,dxdy<\infty. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть μ — мульти-индекс, такой, что $|\mu|=i$, $1\leqslant i\leqslant m-1$, тогда

$$D^\mu u(x,y)=-\int_r^h\frac{\partial}{\partial s}D^\mu u(x_0+s\omega',s\omega_{n+1})\,ds+D^\mu u(x_0+h\omega',h\omega_{n+1}),$$

где $r=\sqrt{|x-x_0|^2+y^2}$, $\omega=(\omega',\omega_{n+1})$, $|\omega|^2=1$. Поэтому имеем

$$\sum_{|\mu|=i}|D^\mu u(x,y)|\leqslant c_1\left(\sum_{|\mu|=i+1}\int_r^h|D^\mu u(x_0+s\omega',s\omega_{n+1})|\,ds+\right.$$

$$\left.+\sum_{|\mu|=i}|D^\mu u(x_0+h\omega',h\omega_{n+1})|\right).$$

Возведем это неравенство в квадрат, используя неравенство Харди (см. [2, с. 319]), получим

$$\sum_{|\mu|=i}\int_{\Gamma_{a,h}(x_0)}(|x-x_0|^2+y^2)^{\frac{2i-1-n}{2}}|D^\mu u(x,y)|^2\,dxdy\leqslant$$

$$\leqslant c_2\sum_{|\mu|=i}\int_{S(a)}\left\{\int_0^h r^{2i-1}dr\right\}|D^\mu u(x_0+h\omega',h\omega_{n+1})|^2\,d\omega+$$

$$+c_2\sum_{|\mu|=i+1}\int_{S(a)}\left\{\int_0^h r^{2i-1}\left[\int_r^h|D^\mu u(x_0+s\omega',s\omega_{n+1})|\,ds\right]^2dr\right\}d\omega\leqslant$$

$$\leqslant c_3\left[A_u+\sum_{|\mu|=i+1}\int_{S(a)}\int_0^h s^{2i+1}|D^\mu u(x_0+s\omega',s\omega_{n+1})|^2\,dsd\omega\right]=$$

$$=c_3\left[A_u+\sum_{|\mu|=i+1}\int_{\Gamma_{a,h}(x_0)}(|x-x_0|^2+y^2)^{\frac{2i+1-n}{2}}|D^\mu u(x,y)|^2\,dxdy\right],$$

где

$$S(a)=\{(x,y)\in\Gamma_a(0),\ |x|^2+|y|^2=1\},$$

$$A_u=\sum_{|\mu|=i}\int_{S(a)}|D^\mu u(x_0+h\omega',h\omega_{n+1})|^2\,d\omega<\infty.$$

Теперь сразу же получим (12), если учесть, что для любой точки $(x,y)\in\in\Gamma_{a,h}(x_0)$ найдется $c_4>0$, такое, что

$$c_4(|x-x_0|^2+y^2)^{\frac{1}{2}}<y\leqslant(|x-x_0|^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 3. Пусть G_0 — открытое ограниченное измеримое множество в R^n и $\alpha>1$. Если измеримое множество $E\subset G_0$ таково, что $\operatorname{mes}G_0\leqslant\leqslant\alpha\operatorname{mes}E$, то найдется такая константа $c=c(n)$ и шар $B\subset G_0$, что

$$\partial B\cap\partial G_0\neq\varnothing,\quad \operatorname{mes}B\leqslant c\alpha\operatorname{mes}\{E\cap B\}.$$

Доказательство леммы имеется в [1].

Пусть G — открытое ограниченное множество в R^n, $P=\operatorname{int}\times\times\{R_+^{n+1}\setminus\bigcup_{x\notin G}\Gamma_a(x)\}$. Функции $N_{P,a}(x)$, $N_{P,a}^0(x)$, $A_{P,a}^{(i)}(x)$, $D_{P,a}(x)$ при $W=P$ определяются формулами (2) — (5).

Теорема 1. Пусть $u(z)$ — решение уравнения (6) в R_+^{n+1}, α, $\beta\in(1,\infty)$. Существуют такие положительные числа $\gamma_i=\gamma_i(n,\alpha,\beta,a)$, $\delta=\delta(n,\alpha,\beta,a)$, $i=1,\ldots,m$, что для всех $\lambda>0$ выполнено неравенство

$$\alpha\operatorname{mes}\{N_{P,a}^0>\beta\lambda\}\leqslant\operatorname{mes}\{N_{P,a}^0>\lambda\}+$$
$$+\alpha\left[c(n,m)\sum_{i=1}^m\operatorname{mes}\{A_{P,a}^{(i)}>\gamma_i\lambda\}+\operatorname{mes}\{D_{P,a}>\delta\lambda\}\right].\qquad(13)$$

Доказательство. Пусть $\pi_{\gamma_i,\lambda,\varepsilon}(x)=\chi_{\{A_{P_\varepsilon,a}^{(i)}>\gamma_i\lambda\}}(x)$, $i=1,\ldots,m$;

$$\chi_W(x)=\begin{cases}1, & x\in W,\\ 0, & x\notin W;\end{cases}$$

$$\pi_{\gamma_i,\lambda,\varepsilon}^*(x)=\sup\left\{\frac{1}{\operatorname{mes}B}\int_B\pi_{\gamma_i,\lambda,\varepsilon}(s)\,ds,\ x\in B\right\};$$

$$E=\left\{N_{P_\varepsilon,a}^0>\beta\lambda,\ \pi_{\gamma_1,\lambda,\varepsilon}^*\leqslant\frac{1}{2^m},\ \ldots,\ \pi_{\gamma_m,\lambda,\varepsilon}^*\leqslant\frac{1}{2^m},\ D_{P_\varepsilon,a}\leqslant\delta\lambda\right\};$$

$$G_0=\{N_{P_\varepsilon,a}^0>\lambda\}.$$

Здесь $P_\varepsilon = P \cap \{y > \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Покажем, что при достаточно малых δ, γ_i, $i = 1, \ldots, m$, выполнено неравенство

$$\alpha \operatorname{mes} E \leqslant \operatorname{mes} G_0. \tag{14}$$

Тогда (13) будет следовать из (14)

$$\operatorname{mes}\left\{\pi^*_{\lambda_i,\lambda,\varepsilon} \geqslant \frac{1}{2^m}\right\} \leqslant c(n, m) \|\pi_{\gamma_i,\lambda,\varepsilon}\|_{L_1(R^n)} = c(n, m) \operatorname{mes}\{A^{(i)}_{P_\varepsilon,a} > \gamma_i\lambda\},$$
$$i = 1, \ldots, m.$$

Множество G_0 открыто и содержится в G. Пусть неравенство (14) не выполнено, т. е. $\operatorname{mes} G_0 \leqslant \alpha \operatorname{mes} E$, по лемме 3 найдется шар $B \subset G_0$, для которого $\operatorname{mes} B \leqslant c_1\alpha \operatorname{mes}\{E \cap B\}$ и существует $x_0 \in \partial B$, такое, что $N^0_{P_\varepsilon,a}(x_0) \leqslant \lambda$. Не теряя общности рассуждений, считаем, что $B = B(0, r)$. Выберем $\xi = \xi(n, \alpha) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ так, чтобы для шара $B_0 = B(0, (1-2\xi)r)$ выполнялось $\operatorname{mes} B_0 = \left[1 - \frac{1}{2\alpha c_1}\right] \operatorname{mes} B$. Тогда

$$\operatorname{mes} B \leqslant 2\alpha c_1 \operatorname{mes}\{E \cap B_0\}.$$

Положим $E_0 = E \cap B_0$. Рассмотрим конусы $V^r = \{(s, y) \in R^{n+1}_+ : |s| < r - ay\}$, $V^r_\varepsilon = V^r \cap \{y > \varepsilon\}$ и область $W_0 = \bigcup_{x \in E_0} (\Gamma_a(x) \cap V^r_\varepsilon)$. Обозначим через $\partial W_0^+ = \partial W_0 \cap \partial V^r_\varepsilon$, $\partial W_0^- = \partial W_0 \setminus \partial W_0^+$.

Дальнейшее доказательство теоремы состоит из четырех утверждений.

Утверждение 1. Пусть $\theta = \frac{\beta - 1}{2}$. Тогда

$$|u(z)| \leqslant \xi^{-1}\sqrt{1 + a^2}\,\delta\lambda, \quad z \in \partial W_0^+. \tag{15}$$

Если выполнено условие

$$\delta < \frac{\theta\xi}{2(\sqrt{1 + a^2} + 1)}, \tag{16}$$

то

$$|u(z)| \leqslant \frac{\theta\lambda}{2}, \quad z \in \partial W_0^+, \tag{17}$$

$$N_{W_0,a}(x) > \theta\lambda, \quad x \in E_0. \tag{18}$$

Введем при $x \in R^n$, $t \geqslant 0$ следующие обозначения:

$$\Gamma_a(x, t) = \{(s, y) : |s - x| < a(y - t)\},$$
$$N(x, t) = \sup\{|u(z)|,\ z \in \Gamma_a(x, t) \cap W_0\},$$
$$W = \{(x, t) \in W_0 : N(x, t) < \theta\lambda\},$$
$$t^x = \inf\{t : (x, t) \in W\}.$$

Обозначим $\partial W^+ = \partial W \cap \partial V^r_\varepsilon$, $\partial W^- = \partial W / \partial W^+$. Ввиду непрерывности $u(z)$ вблизи ∂W_0^+ из (17) вытекает, что W не пусто и $\partial W^+ = \partial W_0^+$. Покажем, что ∂W^- есть липшицева поверхность

$$|t^s - t^x| \leqslant a^{-1}|s - x|. \tag{19}$$

Действительно, пусть, например, $t^s - t^x > a^{-1}|s - x|$. Тогда $(s, t^s) \in \Gamma_a(x, t^x)$. Найдется $t > t^x$, для которого $N(x, t) < \theta\lambda$ и столь близкое к t^x, что $(s, t^s) \in \Gamma_a(x, t)$. Так как $\Gamma_a(s, t^s) \subset \Gamma_a(x, t)$, то $N(s, t^s) \leqslant N(x, t) < \theta\lambda$, что противоречит определению t^s. Очевидно, что $|u(s, y)| \leqslant \theta\lambda$, $(s, y) \in \overline{W}$.

Введем множество

$$S = \left\{(x, t^x) : |u(x, t^x)| > \frac{\theta\lambda}{2}\right\} \subset \partial W^-.$$

Всюду ниже $P(S)$ означает проекцию множества S на R^n_x.

Утверждение 2. Существует постоянная $c = c(n, \alpha) > 0$, такая, что

$$\operatorname{mes} \mathrm{P}(S) \geqslant c \operatorname{mes} B. \tag{20}$$

Утверждение 3. Для любого $a > 0$ найдутся столь малые $\delta = \delta(\alpha, \beta, a, m)$, $r_0 = r_0(\alpha, \beta, a, m)$, что будет выполнено

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{|\mu|=i} \int_W y^{2i-1} |D^\mu u(z)|^2 dz \geqslant e\theta^2\lambda^2 \operatorname{mes} B. \tag{21}$$

Доказательство. Воспользовавшись формулой Грина (ν — внешняя нормаль к ∂W), имеем

$$\int_W [y^{2m-1}\Delta^m u^2 - u^2 \Delta^m y^{2m-1}]\, dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{1 \leqslant |\alpha|+|\beta| \leqslant 2m-1} c^{(i)}_{\alpha,\beta} \int_{\partial W} y^{|\alpha|+|\beta|} D^\alpha u D^\beta u \cos(\nu, z_i)\, d\sigma -$$

$$-(2m-1)! \int_{\partial W} u^2 \cos(\nu, y)\, d\sigma.$$

Обозначим через $R_s^{(j)}$ выражение

$$R_s^{(j)} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{1 \leqslant |\alpha|+|\beta| \leqslant s} c^{(i,j)}_{\alpha,\beta} \int_{\partial W} y^{|\alpha|+|\beta|} D^\alpha u D^\beta u \cos(\nu, z_i)\, d\sigma, \quad 1 \leqslant s \leqslant 2m-1,$$

$\Delta^m y^{2m-1} = 0$, поэтому докажем оценку

$$I = \int_W y^{2m-1} \Delta^m u^2 dz \leqslant R^{(1)}_{2m-1} + c \sum_{i=1}^{m} \sum_{|\mu|=i} \int_W y^{2i-1} |D^\mu u|^2 dz.$$

Используя уравнение, имеем

$$\int_W y^{2m-1} \Delta^m u^2 dz = \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=2m \\ |\alpha|+|\beta| \geqslant 1}} c_{\alpha,\beta} \int_W y^{2m-1} D^\alpha u D^\beta u dz.$$

Пусть $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| \geqslant m$ и $\beta = \beta' + \gamma$, где $|\beta'| = m$, $|\gamma| \geqslant 0$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_W y^{2m-1} D^\alpha u D^\beta u dz = R^{(2)}_{2m-1} + (-1)^{|\gamma|} \int_W D^\gamma (y^{2m-1} D^\alpha u)\, D^{\beta'} u dz =$$

$$= R^{(2)}_{2m-1} + (-1)^{|\gamma|} \sum_{j=0}^{|\gamma|} \sum_{|\delta|=|\gamma|-j} c'_{j,\delta} \int_W y^{2m-j-1} D^{\alpha+\delta} u D^{\beta'}\, u dz.$$

Требуемая оценка интеграла I следует из неравенства Коши, поэтому

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{|\mu|=i} \int_W y^{2i-1} |D^\mu u|^2 dz \geqslant -c_2(m) \int_{\partial W^-} u^2 \cos(\nu, y)\, d\sigma -$$

$$-c_2(m) \int_{\partial W^+} u^2 \cos(\nu, y)\, d\sigma + R^{(3)}_{2m-1} = L_1 + L_2 + L_3, \quad c_2(m) > 0.$$

Учитывая, что

$$\sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2m-1} y^{|\alpha|} |D^\alpha u(z)| \leqslant \delta\lambda, \quad z \in \overline{W},$$

$$|u(z)| \leqslant \xi^{-1} \sqrt{1 + a^{-2}}\, \delta\lambda, \quad z \in \partial W^+,$$

$$|u(z)| > \frac{\theta\lambda}{2}, \quad z \in S \subset \partial W^-,$$

$$-\cos(\nu, y) \geqslant \frac{1}{\sqrt{1 + a^{-2}}} \quad \text{на} \quad \partial W^-,$$

получаем

$$L_1 \geqslant c_0(m, n) \left(\frac{\theta\lambda}{2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + a^{-2}}} \operatorname{mes} B,$$

$$|L_2| \leqslant c_1(m, n)\, \xi^{-2}(1+a^{-2})\, \delta^2\lambda^2 \operatorname{mes} B,$$

$$|L_3| \leqslant c_1(m, n) \frac{r}{a} \delta^2\lambda^2 \operatorname{mes} B.$$

Выбирая δ столь малым, чтобы

$$|L_2| + |L_3| \leqslant \frac{1}{2} c_0(m, n) \left(\frac{\theta\lambda}{2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}}} \operatorname{mes} B,$$

получаем (21).

Введем множества

$$E_1^{(i)} = \left\{\psi^*_{\gamma_i,\lambda,\varepsilon} \leqslant \frac{1}{2^m}\right\} \cap B, \quad E_1 = \bigcap_{i=1}^{m} E_1^{(i)},$$

$$E_2^{(i)} = \{A^{(i)}_{P_\varepsilon,a} \leqslant \gamma_i\lambda\} \cap B, \quad E_2 = \bigcap_{i=1}^{m} E_2^{(i)},$$

$$W_1 = \bigcup_{x \in E_1} (\Gamma_a(x) \cap V^r_\varepsilon).$$

Утверждение 4. Справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{|\alpha|=i} \int_{W_1} y^{2i-1} |D^\alpha u|^2 \, dz \leqslant c(n, m) \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^2 \lambda^2 \operatorname{mes} B. \tag{22}$$

Для окончания доказательства теоремы 1 остается заметить, что при достаточно малых γ_i неравенства (21), (22) противоречат друг другу. Поэтому неравенство, противоположное (14), невозможно.

Из теоремы 1, аналогично тому, как это делалось в [1, 3], получаем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $u(z)$ является решением уравнения (6) в R^{n+1}_+ и пусть при некоторых $a, h > 0$ выполнено условие $A^{(m)}_{h,a}(x) < \infty$ в каждой точке x из некоторого измеримого множества $E \subset R^n_x$, $\operatorname{mes} E > 0$. Тогда почти в каждой точке $x_0 \in E$ существует конечный нетангенциальный предел

$$\lim u(x, y) = l < \infty, \ (x, y) \to (x_0, 0), \ (x, y) \in \Gamma_a(x_0) \tag{23}$$

для всех $a > 0$.

Теорема 3. Пусть $u(z)$ — решение уравнения (6) в R^{n+1}_+ и пусть выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{|\mu|=i} \int_{R^{n+1}_+} y^{2i-1} |D^\mu u(z)|^2 \, dz < \infty. \tag{24}$$

Тогда для почти всех $x \in R^n$ и для любого $a > 0$ существует предел

$$\lim u(s, y) < \infty, \quad (s, y) \to (x, 0), \quad (s, y) \in \Gamma_a(x). \tag{25}$$

Пусть, кроме того, $\lim\limits_{y\to\infty} u(x, y) = 0$. Тогда существует функция $u_0(x) \in L_2(R^n)$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \|u(x, \varepsilon_k) - u_0(x)\|_{L_2(R^n)} = 0, \tag{26}$$

$$\sup_k \|u(x, \varepsilon_k)\|_{L_2(R^n)} < \infty \tag{27}$$

для последовательности чисел $\{\varepsilon_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Аналогичные результаты могут быть получены для классических решений уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \Delta^m u = 0.$$

1. *Burholder D. L., Gundy R. F.* Distribution function inequalities for the area integral // Studia Math.— 1972.— 44, N 6.— P. 527—544.
2. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М. : Мир, 1973.— 342 с.

3. *Шелепов В. Ю.* О граничных свойствах решений эллиптических уравнений в многомерных областях, представимых с помощью разности выпуклых функций // Мат. сб.— 1987.— **133** (175), № 4.— С. 446—468.

Ин-т прикл. математики
и механики АН Украины, Донецк

Получено 20.12.91